Опр. 2 Пусть $f \in R[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$. Функция $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, $a \le x \le b$, наз-ся <u>интегралом с переменным верхним пределом</u>.

$$\left|\int_c^{c+\Delta x} \underbrace{|f(t)|}_{\le M\ \forall t \in [a,b]} dt\right| \le \left|\int_c^{c+\Delta x} M\cdot dt\right| = M\left|\int_c^{c+\Delta x} 1\,dt\right| = M\cdot|\Delta x|$$

Пусть теперь f непрерывна в точке $\xi \in [a,b]$. Тогда возьмем $\Delta x \in \mathbb{R}$, т.ч. $\xi + \Delta x \in [a,b]$. Тогда

$$\left|\frac{F(\xi+\Delta x) - F(\xi)}{\Delta x} - f(\xi)\right| = \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{\xi}^{\xi+\Delta x} f(t)\,dt - f(\xi)\right| \underset{\uparrow}{=}$$

$\to F'(\xi)$, $\Delta x \to 0$.

1-я теор. о среднем

μ лежит между inf и sup ф-ции f на отрезке между ξ и $\xi + \Delta x$

$$= \left|\frac{1}{\Delta x}\cdot\mu\cdot\underbrace{\int_{\xi}^{\xi+\Delta x} 1\,dt}_{=\Delta x} - f(\xi)\right| = |\mu - f(\xi)| \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$$

в силу непр-ти f в точке ξ

ч.т.д.

Опр. 1 Будем говорить, что ф-ция f <u>непрерывно дифференцируема</u> на отрезке $[a,b]$ ($f \in C^1[a,b]$), если $f'(x)$ сущ-т и непр-на $\forall x \in (a,b)$ и $\exists$ конечные $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x)$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f'(x)$.

$f'(a) :=$ $\quad f'(b) :=$

Т. 1 (замена перем-й в определенном инт-ле). Пусть $f \in C[a,b]$; $\varphi \in C^1[\alpha,\beta]$, где $\min\limits_{\alpha \le t \le \beta} \varphi(t) = \varphi(\alpha) = a$; $\max\limits_{\alpha \le t \le \beta} \varphi(t) = \varphi(\beta) = b$. Тогда $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$

Т. 2 (интегр-е по частям в опред-м интеграле)

Пусть $f, g \in C^1[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx.$$

Д-во: ф-ция $f(x)\cdot g(x)$ – первообр-я для $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ на $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\,dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b$

Т. 2 Если $f \in R[a,b]$, то $F \in C[a,b]$. Кроме того, если f непрерывна в точке $\xi \in [a,b]$, то F диф-ма в т. ξ и $F'(\xi) = f(\xi)$.

Д-во: Пусть $c \in [a,b]$ – произвольная, $\Delta x \in \mathbb{R}$, т.ч. $c + \Delta x \in [a,b]$. Тогда

$$|F(c+\Delta x) - F(c)| = \left|\int^{c+\Delta x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{c} f(t)\,dt\right| = \left|\cancel{\int_{x_0}^{c} f(t)\,dt} + \int_c^{c+\Delta x} f(t)\,dt - \cancel{\int_{x_0}^{c} f(t)\,dt}\right| = \left|\int_c^{c+\Delta x} f(t)\,dt\right| \le$$

$$\le \left|\int_c^{c+\Delta x} \underbrace{|f(t)|}_{\le M} dt\right| \le \overbrace{\sup_{a \le t \le b} |f(t)|}^{=M}\cdot|\Delta x| \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0 \Rightarrow F \text{ непр-на в точке } c.$$

Следствие Если $f \in C[a,b]$, то ф-ция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ явл-ся одной из первообразных для f на $[a,b]$.

Т. 3 (формула Ньютона – Лейбница). Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) =: \Phi(x)\Big|_a^b,$$

где Φ – любая из первообр-х для f на $[a,b]$.

$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$

Д-во: Положим $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$. Пусть Φ – произвольная перв-я для f на $[a,b] \Rightarrow \Phi(x) = F(x) + C$ $\forall x \in [a,b]$. Значит, $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - \underbrace{F(a)}_{=0} = \Phi(b) - \cancel{C} - \Phi(a) + \cancel{C}$.

ч.т.д.

Д-во: Пусть Φ – первообр-я для f на $[a,b]$. Тогда $\Phi(\varphi)$ диф-ма на $[\alpha,\beta]$ как сложная ф-ция, причем $(\Phi(\varphi(t)))' = \Phi'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\ \forall t \in [\alpha,\beta]$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt \underset{\text{Н.-Л.}}{=} \Phi(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) =$$

$$= \Phi(b) - \Phi(a) \underset{\text{Н.-Л.}}{=} \int_a^b f(x)\,dx.$$

ч.т.д.

Пример ($a > 0$)

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x = a\sin t \\ 0 \le t \le \pi/2 \\ dx = a\cos t\,dt \end{matrix}\right| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt = a^2\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = a^2\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \frac{\pi a^2}{4}$$

Пример:

$$\int_0^{\pi/2} x\cdot\sin x\,dx = -\int_0^{\pi/2} x\,d\cos x = \underbrace{-x\cdot\cos x\Big|_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$